Année académique 2023–2024

PHYS-F432 – Théorie de la Gravitation
– Seconde séance d'exercices –

`calcul tensoriel sur une variété différentielle et équations de Maxwell en espace-temps courbe`

Exercice 1 : contractions de tenseurs. Soit $T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ un tenseur de rang (m,n) et $S^{\mu_1\cdots\mu_{m'}}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n'}}$ un tenseur de rang (m',n').

a. Vérifier explicitement que $T^{\mu_1\cdots\mu_{m-1}\gamma}{}_{\nu_1\ldots\nu_{n-1}\gamma}$ sont les composantes d'un tenseur de rang $(m-1,n-1)$.

b. *Vérifier explicitement que $(TS)^{\mu_1\cdots\mu_{m+m'}}{}_{\nu_1\ldots\nu_n+n'} \equiv T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}S^{\mu_{m+1}\cdots\mu_{m+m'}}{}_{\nu_{n+1}\ldots\nu_{n+n'}}$ sont les composantes d'un tenseur de rang $(m+m',n+n')$.

♡**Exercice 2 : densités tensorielles.** Une *densité de poids p* est une grandeur A qui se transforme comme

$$A' = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right|^p A.$$

D'autre part, une *densité tensorielle de poids p* est une grandeur $T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}$ qui se transforme comme

$$T^{\alpha'_1\cdots\alpha'_m}{}_{\beta'_1\cdots\beta'_n} = \left|\det\left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)\right|^p \frac{\partial x^{\alpha'_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\alpha'_m}}{\partial x^{\mu_m}}\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\beta'_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x^{\beta'_n}}T^{\mu_1\cdots\mu_m}{}_{\nu_1\ldots\nu_n}.$$

a. Montrer que $g \equiv \det(g_{\alpha\beta})$ est une densité de poids 2. En déduire que $\sqrt{|g|}$ est une densité de poids 1.

b. Le symbole de Levi-Civita $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est le symbole complètement antisymétrique et numériquement invariant sous les transformations de déterminant positif défini tel que $\tilde{\varepsilon}^{0123} = +1$. Montrer que $\tilde{\varepsilon}^{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids 1.
INDICE : se rappeler des formules pour calculer le déterminant d'une matrice dont les colonnes sont les 4 vecteurs $A^\alpha{}_{(i)}$ (respectivement dont les lignes sont les 4 covecteurs $A^{(i)}{}_\alpha$) :

$$\det\left(A^\alpha{}_{(i)}\right) = A^\alpha{}_{(1)}A^\beta{}_{(2)}A^\gamma{}_{(3)}A^\delta{}_{(4)}\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta},$$
$$\det\left(A^{(i)}{}_\alpha\right) = A^{(1)}{}_\mu A^{(2)}{}_\nu A^{(3)}{}_\rho A^{(4)}{}_\sigma\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}.$$

c. Montrer que $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ est une densité tensorielle de poids -1. Montrer que

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{-1}g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}g_{\gamma\nu}g_{\delta\rho}\tilde{\varepsilon}^{\lambda\mu\nu\rho}.$$

d. Montrer que le tenseur de Levi-Civita introduit au cours, défini par

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \sqrt{|g|}\,\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

est bien un tenseur.

***Exercice 3 : formulation tensorielle des équations de Maxwell.** En espace-temps plat, les équations de Maxwell peuvent s'écrire de façon covariante comme

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \qquad \partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0. \tag{1}$$

Le but de cet exercice est de montrer que ces équations se réduisent bien aux équations de Maxwell dans leur formulation vectorielle habituelle.

a. Montrer que les identités de Bianchi $\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0$ sont une conséquence directe de la définition usuelle

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{2}$$

b. Montrer que les équations (1) se réduisent aux équations de Maxwell habituelles

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \rho, \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \vec{\nabla}\times\vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

Montrer en particulier que le champ électrique est $E_i \equiv F_{0i}$ et que le champ magnétique est $B_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk}$. Exprimer les densités de charge ρ et de courant $\vec{j}$ en termes des composantes du quadri-vecteur J^μ.

INDICE : on montrera que $B_i \equiv -\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}F^{jk} \Leftrightarrow F^{ij} = -\varepsilon^{ijk}B_k$ et on se souviendra que $(\vec{\nabla}\times\vec{A})^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j A_k$.

c. Montrer que les équations de Maxwell sont les équations du mouvement qui extrémisent l'action

$$S = \int \mathrm{d}^4x\left(-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - J_\mu A^\mu\right).$$

♡Exercice 4 : équations de Maxwell dans le langage des formes différentielles. Le but de cet exercice est de montrer que les équations de Maxwell en espace-temps courbe sont

$$\mathrm{d}(\star F) = \star J, \qquad \mathrm{d}F = 0$$

et que celles-ce se ramènent bien aux équations de l'électromagnétisme en relativité restreinte (1) dans un référentiel localement inertiel, comme requis par le principe d'équivalence.

a. Montrer que $\partial_{[\mu}F_{\nu\rho]} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{d}F = 0$.
b. *Montrer que pour une matrice carrée M, on a $\det(I + \varepsilon M) = 1 + \varepsilon\,\mathrm{Tr}(M) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Cette propriété est en fait valable pour toute matrice carrée.
c. Montrer que sous une variation de éléments de M, la variation de la quantité $\ln|\det M|$ est donnée par $\delta\ln|\det M| = \mathrm{Tr}\big(M^{-1}\delta M\big)$.
d. Montrer que $\Gamma^\mu_{\mu\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\sqrt{|g|}$.
e. Soit F une 2-forme. Montrer que sa dérivée covariante satisfait à l'équation

$$\nabla_\alpha F^{\alpha\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\alpha\big(\sqrt{|g|}F^{\alpha\nu}\big).$$

f. Montrer que pour une 2-forme F à 4 dimensions, on a $(\star\mathrm{d}\star F)^\nu = \nabla_\mu F^{\mu\nu}$. Conclure que l' équation $\mathrm{d}(\star F) = \star J$ est valable pour tout système de coordonnées et se réduit aux équations de Maxwell de la Relativité Restreinte dans un référentiel localement inertiel. Pour ce faire, utiliser le fait que $\star\star J = J$ pour une 1-forme à 4 dimensions. (*Démontrer cette dernière propriété !)
g. *Montrer que les identités de Bianchi $\mathrm{d}F = 0$ sont automatiquement satisfaites si l'on suppose que que la 2-forme F est *exacte*, c-à-d qu'il existe une 1-forme A telle que $F = \mathrm{d}A$. Montrer que $F = \mathrm{d}A$ se réduit en fait à la définition usuelle (2).